

# UNIVERSITÄT TÜBINGEN

## PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM II

AG

---

# Auflösungsvermögen

---

*Von:*  
Fabian Kraus  
Simon Fischer

*Betreuung:*  
S. Struzek

10. Dezember 2021

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Versuchsbeschreibung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>1</b>
2.1	Auflösungsvermögen . . . . .	1
2.2	Auflösung eines Prismas . . . . .	1
2.3	Auflösung eines Gitters . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Ergebnisse &amp; Auswertung</b>	<b>4</b>
4.1	Nullpunkt des Messspaltes . . . . .	4
4.2	Prisma . . . . .	4
4.3	Gitter . . . . .	5
4.4	Fazit . . . . .	5

# 1 Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch wird das Auflösungsvermögen eines Gitters und eines Prismas experimentell bestimmt.

## 2 Physikalische Grundlagen

### 2.1 Auflösungsvermögen

Die Auflösung eines optischen Instrumentes wird durch die Beugung beeinflusst. Beispielsweise wird ein Spalt nicht gemäß seiner Geometrie abgebildet, sondern es bildet sich ein Beugungsmuster, wenn der Spaltbreite im Bereich der Wellenlänge des Lichtes liegt.

Das Auflösungskriterium nach Rayleigh besagt, dass zwei Lichtquellen als getrennt wahrgenommen werden können, wenn das Maximum der einen Wellenlänge auf das Minimum der anderen fällt.

### 2.2 Auflösung eines Prismas

Für die Betrachtungen wird die Brechung an dem Prisma betrachtet, bei dem der Ablenkwinkel  $\delta$  sein Minimum für beliebige Wellenlängen annimmt. Dies entspricht einem symmetrischen Strahlengang.

Nach dem Rayleigh-Kriterium wird für das Auflösungsvermögen  $\sin(\theta) = \frac{\lambda}{B}$  vorausgesetzt. Außerdem soll für  $\lambda_1 : n_1 = n(\lambda)$  und für  $\lambda_2 : n_2 = n(\lambda + \Delta\lambda)$  gelten.

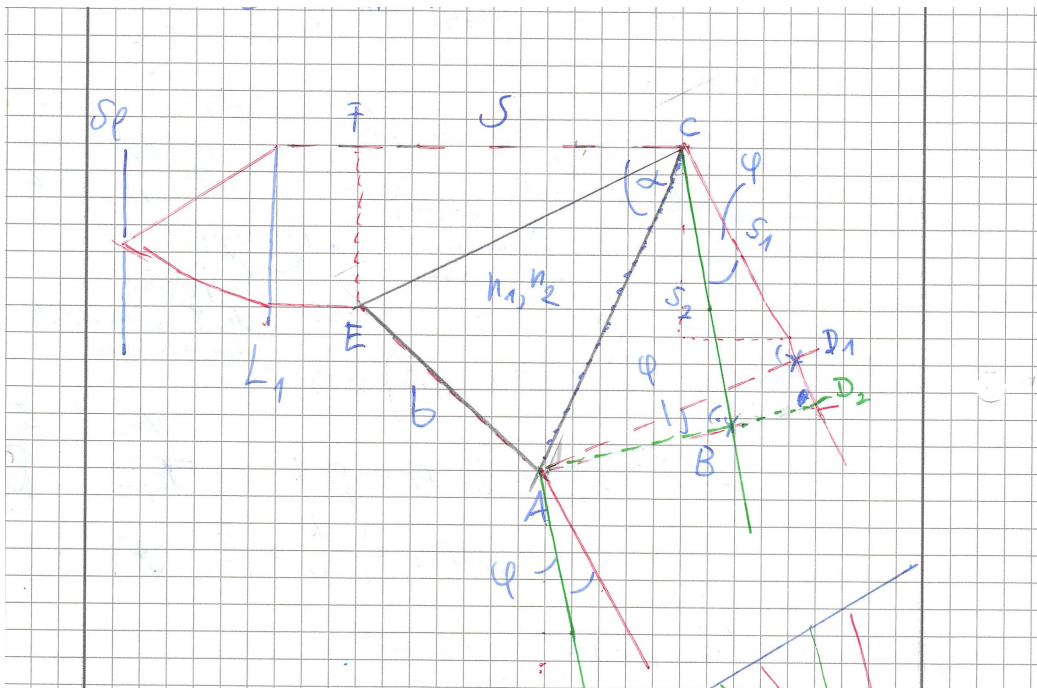


Abbildung 1: Strahlengang durch Prisma ( $\varphi = \theta$ )

Ein paralleles Strahlenbündel von  $\lambda_1$  (rot) trifft mit der Wellenfront  $\overline{EF}$  auf das Prisma, derart, dass der Strahl innerhalb des Prismas parallel zur effektiven Basisbreite  $b$  verläuft. Die Wellenfront wird an jedem Punkt des Prismas gleichermaßen gebrochen. Nach dem Huygenschen Prinzip bildet sich die Wellenfront wieder in  $\overline{AD_1}$  zusammen.

Der optische Weg des Strahls über die Länge  $b$  muss demnach dem optischen Weg über  $s$  und  $s_1$  entsprechen. Der Brechungsindex für Luft wird als  $n_{Luft} = 1$  angenommen.

Daraus erhält man,

$$OW(\overline{EA}) = n_1 b = s_1 + s = OW(\overline{FC} + \overline{CD_1})$$

Analog erhält man für  $\lambda_2$  (grün) den optischen Weg:

$$n_2 b = s_2 + s$$

Nutzt man zudem für  $n_2$  die Taylorentwicklung so folgt

$$s + s_2 = n(\lambda)b + b \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Die Differenz des optischen Weges  $\overline{D_1 D_2}$  berechnet sich aus

$$OW(\overline{D_1 D_2}) = s_2 - s_1 = n(\lambda)b + b \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda - s - (n(\lambda)b - s) = b \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

$$\Leftrightarrow \Delta s = b \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Nutzt man die Bedingung für das Auflösungsvermögen bekommt man

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{B} = \frac{\overline{D_1 D_2}}{B} \Rightarrow \overline{D_1 D_2} = \lambda$$

Fügt man alles zusammen so folgt die Gleichung

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{dn}{d\lambda} \quad (1)$$

Durch die Forderung  $\sin(\theta) \approx \theta \approx \frac{\lambda}{B}$  ergibt sich zusätzlich der Zusammenhang

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B \cdot \frac{\theta}{\Delta\lambda} \quad (2)$$

## 2.3 Auflösung eines Gitters

Ein Gitter wird beleuchtet, dabei entsteht auf einem hinter dem Gitter befindlichen Schirm ein Interferenzmuster. Die Intensitätsverteilung ist gegeben durch

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin[2](\frac{N\pi d \sin(\theta)}{\lambda})}{\sin[2](\frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda})} \quad (3)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Gitterstriche,  $d$  der Spaltabstand und  $\theta$  der betrachtete Winkel ist.

Aus Gl.(1) ergeben sich folgende Eigenschaften:

- Nullstelle bei

$$\sin(\frac{\pi N d \sin(\theta)}{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{k}{N} \quad \forall k \in Z : \frac{k}{N} \notin Z$$

- Maximum bei

$$\sin(\frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) = m \frac{\lambda}{d} \quad \forall m \in Z$$

Das Auflösungsvermögen für das Gitter erhält man unter Verwendung des Rayleigh-Kriterium. Man stellt  $\lambda_2$  durch  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$  dar. Die Position der Nulllage von  $\lambda_1$  ist durch die Position des m.-Maximums und die Lage des 1. Minimums gegeben. d.h.

$$d \sin(\theta_1) = \overbrace{m \cdot \lambda_1}^{\text{m.-Maximum}} + \underbrace{\lambda_1 \cdot \frac{1}{N}}_{\text{1. Minimum}}$$

Mithilfe des Rayleigh-Kriterium folgt für das m.-Maximum von  $\lambda_2$

$$\begin{aligned} d \sin(\theta_1) &= m \cdot \lambda_1 + \lambda_1 \cdot \frac{1}{N} \stackrel{!}{=} m \cdot \lambda_2 \\ \Rightarrow m \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\Delta\lambda} &= \frac{\lambda_1}{N} \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = mN \end{aligned} \quad (4)$$

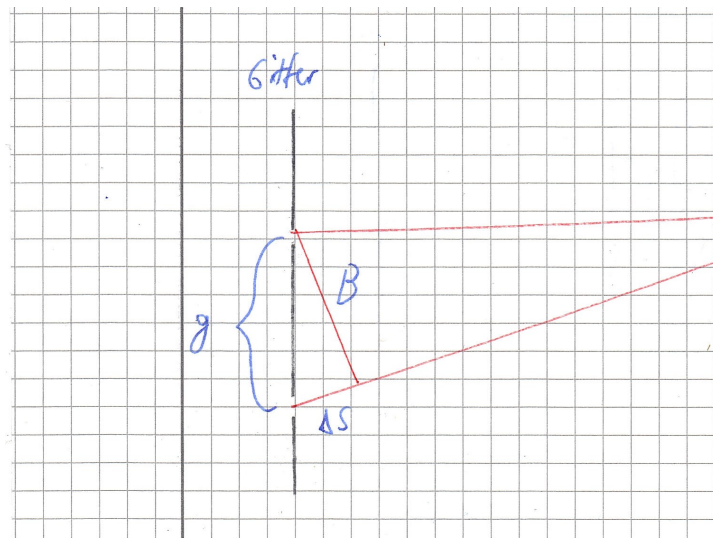


Abbildung 2: Gangunterschied zweier Strahlen beim Gitter

Durch die Winkelbeziehungen  $\cos(\theta) = \frac{B}{Nd}$  für  $N$  und  $\sin(\theta) = m \frac{\lambda}{d}$  für  $m$ , erhält man

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{B \sin(\theta)}{\lambda \cos(\theta)} = \frac{B}{\lambda} \tan(\theta) \quad (5)$$

### 3 Versuchsdurchführung

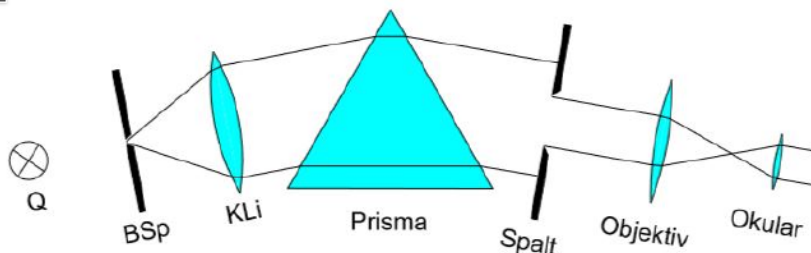


Abbildung 3: Schematischer Versuchsaufbau (Prisma)

Der Versuch wird wie in Abb. 3 aufgebaut, zuerst mit dem Gitter, dann mit dem Prisma. Unser Prisma war wohl leider defekt, wir haben kein scharfes Bild der zwei Spalte einstellen können, weswegen wir hier die Messwerte von einer anderen Gruppe genommen haben.

Zunächst wird die Nullpunktspalbreite des Spalts am Fernrohr durch wiederholtes auf- und zudrehen bestimmt. Dann werden beim Gitter die ersten drei Winkel gemessen, bei denen Maxima zu finden sind. Beim Prisma wird analog vorgegangen, nur sucht man hier den Abstand der grünen zur gelben Linie. Außerdem wird die benötigte Spaltbreite festgehalten, um die zwei gelben Linien separat sehen zu können.

## 4 Ergebnisse & Auswertung

### 4.1 Nullpunkt des Messspaltes

Der Nullpunkt wurde 10 mal vermessen, das Ergebnis (mit statistischem Fehler) ist:

$$B_0 = (1.84 \pm 0.09)\text{mm}$$

Für das Gitter wurde eine andere Versuchsanordnung benutzt, hier war

$$B_0 = (0.125 \pm 0.02)\text{mm}$$

### 4.2 Prisma

Das Prisma wurde in der Halterung des Messinstrumentes gebracht und so ausgerichtet, dass ein symmetrischer Strahlengang entsteht.

Der Winkel zwischen dem grünen und gelben Hg-Linien gemessen und die Differenz dieser Winkel berechnet.

Die Werte sind:  $\theta_{gr} = 131.12^\circ$  und  $\theta_{ge} = 131.65^\circ$

$$\theta' = \theta_{ge} - \theta_{gr} = 0.53^\circ$$

Damit kann man durch lineare Interpolation den Winkel zwischen den zwei gelben Linien berechnen:

$$\theta = \frac{579.1 - 577}{578 - 546.3} \theta' = 0.035^\circ = 0.61279\text{mrad}$$

Gemessen wurde dann die Breite des Messspaltes in den Punkten, in denen die gelben Hg-Linien gerade noch getrennt zu sehen sind und in denen sie nicht mehr getrennt beobachtbar sind. Die halbe Differenz der zugehörigen Messwerte bildet die Ungenauigkeit.

	$B_g$ [mm]	$B_z$ [mm]	$\frac{B_g+B_z}{2}$ [mm]	$\frac{ B_g-B_z }{2}$ [mm]
1	0.97	0.76	0.865	0.105
2	1.21	0.89	1.05	0.16
3	1.14	0.75	0.945	0.195
4	0.99	0.62	0.805	0.185
5	1.13	0.83	0.98	0.15

Tabelle 1: Messwerte Spaltbreite

Der gewichtete Mittelwert dieser Werte ist  $B = (0.92 \pm 0.06)\text{mm}$ . Zudem wurde Damit ergibt sich dann die Auflösung des Prismas (mit  $\Delta\lambda = 2.1\text{nm}$ ):

$$A_{exp} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B \frac{\theta}{\Delta\lambda} = 268.46 \pm 18 \quad (6)$$

Das theoretische Auflösungsvermögen ist  $A_{th} = 275.24$ , unser ermittelter Wert bestätigt also die Theorie in guter Näherung.

### 4.3 Gitter

Die Messung für das Gitter ähnelt der Messung des Prismas. Hierbei wird der Winkel  $\theta$  zwischen dem Hauptmaximum und der jeweiligen Ordnung gemessen.

Im folgenden sind die einzelnen Messungen aufgelistet:

- Messung bei 1.Ordnung

	$B_g$ [mm]	$B_z$ [mm]	$\frac{B_g+B_z}{2}$ [mm]	$\frac{ B_g-B_z }{2}$ [mm]
1	3.14	3.05	3.095	0.045
2	3.22	2.96	3.09	0.13
3	3.1	3.01	3.055	0.045
4	3.26	3.09	3.175	0.085
5	3.09	2.95	3.02	0.07

- Messung bei 2.Ordnung

	$B_g$ [mm]	$B_z$ [mm]	$\frac{B_g+B_z}{2}$ [mm]	$\frac{ B_g-B_z }{2}$ [mm]
1	1.68	1.63	1.655	0.025
2	1.67	1.6	1.635	0.035
3	1.69	1.63	1.66	0.03
4	1.66	1.6	1.63	0.03
5	1.72	1.69	1.705	0.015

- Messung bei 3.Ordnung

	$B_g$ [mm]	$B_z$ [mm]	$\frac{B_g+B_z}{2}$ [mm]	$\frac{ B_g-B_z }{2}$ [mm]
1	1.01	0.85	0.93	0.08
2	1.05	0.93	0.99	0.06
3	1.06	0.93	0.995	0.065
4	1.06	0.95	1.005	0.055
5	1.09	0.99	1.04	0.05

Hieraus kann man erneut wie beim Prisma den gewichteten Mittelwert berechnen. Mit Gl. (5) kann man daraus nun die Auflösung berechnen (ein Wert pro Ordnung,  $\lambda = 577\text{nm}$ ):

	B [mm]	$\theta$ [grad]	A	Stat. Fehler
1.Ordnung	2.953	3.13	279.15	$\pm 3.14$
2.Ordnung	1.551	6.97	327.21	$\pm 5.24$
3.Ordnung	0.877	9.91	264.45	$\pm 9.99$

Die Werte für die 1.Ordnung und die 3.Ordnung beinhalten  $A_{th}$  (siehe Prisma) im Fehlerintervall und scheinen demnach die Theorie zu bestätigen.

Jedoch besitzt die Messung der 2.Ordnung eine recht große Abweichung zum Theoriewert. Die Hg-Linien höherer Ordnung sind an sich unklarer und schwächer in Intensität für das Auge, womit erschwert ist, den richtigen Abstand der zwei gelben Linien wahrzunehmen und der Fehler größer wird.

### 4.4 Fazit

Die gemessenen/errechneten Werte für das Auflösungsvermögen liegen alle überraschend nahe an der Theorie, wenn man die diversen Probleme bei der Versuchsdurchführung bedenkt, wie z.B. sehr schwer erkennbare Unterschiede zwischen den Doppel-Linien und allgemeine Unschärfe im Okular.